I. S. F. A. 2006-2007

Concours d'Entrée

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Calculatrice autorisée

OPTION A

Le sujet est composé d'un exercice et de deux problèmes tous indépendants.

EXERCICE

On considère l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) : \ (x^2-1)\ y' + x\ y = x^3 - x .$$

1. Déterminer une fonction polynôme p solution de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$.
2. Résoudre l'équation (E) sur chacun des intervalles $]-\infty, -1[$, $]-1, 1[$ et $]1, +\infty[$.
3. Expliquer pourquoi la seule solution de (E) sur $\mathbb{R}$ est la fonction p.

PROBLEME I

1. Question préliminaire

   On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

   a. Exprimer ${}^tA$ en fonction de A et déterminer le rang de A.

   b. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Dans la suite, E est un espace vectoriel euclidien de dimension n c'est à dire un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire que l'on notera $(\ |\ )$. La norme associée à ce produit scalaire est notée $\|\ \|$.

Un endomorphisme u de E est **antisymétrique** si pour tout couple (x, y) de vecteurs de E on a :

$$\big(u(x)\ |\ y\big) = -\big(x\ |\ u(y)\big).$$

On notera $\mathcal{A}(E)$ l'ensemble des endomorphismes antisymétriques de E.

2. Montrer que $u \in \mathcal{A}(E)$ si et seulement si, pour tout vecteur x de E on a $\big(u(x)\ |\ x\big) = 0$.
3. Soit u un endomorphisme de E, soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et A la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.

   Montrer que $u \in \mathcal{A}(E)$ si et seulement si, ${}^tA = -A$.
4. Montrer que $\mathcal{A}(E)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel dont on déterminera la dimension.
5. Exemple

   On suppose que $\dim E = n \geq 3$, a et b sont deux vecteurs non nuls et orthogonaux de E, on définit u pour tout vecteur x de E par : $u(x) = (a\ |\ x)\ b - (b\ |\ x)\ a$.

   a. Montrer que $u \in \mathcal{A}(E)$.

   b. On pose $e_1 = \dfrac{a}{\|a\|}$, $e_2 = \dfrac{b}{\|b\|}$ et on complète cette famille pour obtenir une base orthonormée $(e_1, e_2, e_3, ..., e_n)$ de E.

   Écrire la matrice de u dans cette base et donner son polynôme caractéristique.

6. Valeurs propres

   Soit $u \in \mathcal{A}(E)$.

   a. Montrer que la seule valeur propre réelle possible de *u* est 0.
   b. L'endomorphisme *u* est-il diagonalisable dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel *E* ?
   c. Montrer que $u \circ u$ est un endomorphisme symétrique réel.
   d. Montrer que si λ est une valeur propre complexe non nulle de *u* alors λ est imaginaire pur.

7. Soit $u \in \mathcal{A}(E)$.

   a. Montrer que si *n* est impair le déterminant de *u* est nul.
   b. Montrer que les espaces $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont orthogonaux.
   c. On note *v* l'endomorphisme induit par *u* sur $\operatorname{Im} u$, montrer que *v* est bijectif.
   d. En déduire que le rang de *u* est pair.

8. Soit $u \in \mathcal{A}(E)$, justifier qu'il existe un entier naturel *p* et *p* réels $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_p$ strictement positifs tels que le polynôme caractéristique de *u* soit :

$$(-1)^n X^{n-2p}(X^2+a_1)(X^2+a_2)...(X^2+a_p).$$

PROBLEME II

A. Règle de Cauchy

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels strictement positifs telle qu'il existe un réel *L* vérifiant $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = L$ (c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\ln u_n} = L$).

1. On suppose que $L < 1$.

   a. Soit $k \in \left]L,\ 1\right[$, montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow u_n < k^n$.
   b. En déduire que la série $\sum u_n$ converge.

2. On suppose que $L > 1$.

   a. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow u_n > 1$.
   b. En déduire que $\sum u_n$ diverge.

3. Montrer que si $L = 1$, on ne peut pas conclure.

4. Exemples : en utilisant la règle de Cauchy que l'on vient de prouver étudier la nature des séries $\sum\limits_{n\geq 0}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ et $\sum\limits_{n\geq 0}\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{n^2+n}$.

B. Comparaison avec la règle de d'Alembert

On pourra utiliser librement, le théorème de Cesàro :

> si la suite de réels (u_n) converge vers un réel *l* alors
> la suite $\left(\dfrac{u_1+u_2+...+u_n}{n}\right)$ converge vers le réel *l*.

5. Soit (w_n) une suite de réels telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}(w_n - w_{n-1}) = l$, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{w_n}{n} = l$.

6. Soit $l \in \left]0,\ +\infty\right[$ et (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{u_{n-1}} = l$, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n} = l$.

7. Étudier la réciproque en considérant la suite (u_n) telle que, pour tout entier naturel p, $u_{2p} = u_{2p+1} = 3^p$.

C. Application aux séries entières

On considère la série entière de la variable réelle $\sum a_n \ x^n$.

8. Montrer que si la suite $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$ converge vers un réel l non nul alors le rayon de convergence de la série est :

   $R = \dfrac{1}{l}$

   (on admet que ce résultat reste valable : si $l = 0$, $R = +\infty$ et si $l = +\infty$, $R = 0$).

9. Applications

   a. Déterminer le rayon de convergence des séries entières
   $\sum 2^n \ x^n$ et $\sum n^{(-1)^n} \ x^n$.

   b. Discuter en fonction du réel $a > 0$ le rayon de la série entière $\sum a^{n^2} \ x^n$.
